Lec (10) ← محاضرة رياضة ٣

→ upper approximation of Complex Integration:-

التقريب العلوى للتكامل المركب :-

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x_r)\cdot \Delta x_r \longrightarrow (1)$$

خطوة التقسيم على محور x بين الفترة [a,b]

← من معنى التكامل المحدد يمكن إيجاد قيمة تقريبية للحد العلوى من وذلك باستخدام الصورة (1) عند تحويلها لصورة مركبة.

$$\int_c f(z)\,dz = \lim_{\Delta z_r \to 0} \sum f(z_r)\,\Delta z_r$$

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{\Delta z_r \to 0} \sum f(z_r)\,\Delta z_r\right|$$

$$\leq \lim_{\Delta z_r \to 0} \sum |f(z_r)|\,|\Delta z_r|$$

$$\leq \int_c |f(z)|\,|dz|$$

← يوجد قيمة M تكون أكبر قيمة للدالة على المنحنى C بالكامل

$$|f(z)| < M$$

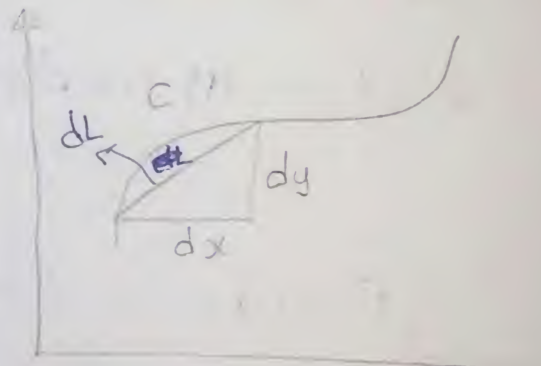
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq M\int_C |dz|$$

$z = x+iy$

$dz = dx + i\,dy$ ، $|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

← عندما تكون dx ، dy صغيرة جداً

←



$$\therefore dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq M\,L$$

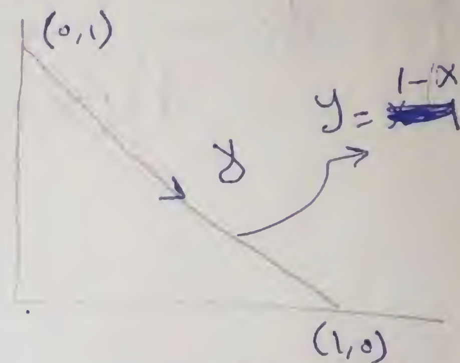
L ← طول المنحنى .

Example

→ Le γ denote the line segment from $z = i$ to $z = 1$. show that $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4} \right| \leqslant 4\sqrt{2}$

$\boxed{\text{Solution}}$

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4} \right| \leqslant ML$$



$$L(\gamma) = \sqrt{2}$$

معادله المنحنى
$y = 1 - x$

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^4} \right| = \frac{1}{|z^4|}$$

$$|z^4| = |z|^4 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4 = (x^2+y^2)^2$$

من معادله المنحنى

$$= \left[x^2 + (1-x)^2\right]^2 = \left[x^2 + 1 - 2x + x^2\right]^2$$

$$= 4\left[x^2 - x + \frac{1}{2}\right]^2$$

* إكمال مربع :

(جذر الأول الإشارة ½ معامل الثانى)² - (½ معامل الثانى)² + الباقى

$$|z^4| = 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right]^2$$

$$= 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^2$$

$$|f(z)| = \frac{1}{4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^2} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

أعلى قيمة للمقدار عند $x = \frac{1}{2}$

$$|f(z)| \leq 4$$

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leq ML$$

$$\leq 4\sqrt{2}$$

Home work

show that $\left|\int_{\gamma} (e^{z} - \bar{z})\,dz\right| \leq 60$

where γ denote the boundary of triangle with vertices $z=0$, $z=-4$ and $z=3i$

في هذا الجزء :-

- ندرس قواعد التكامل التي تحسب بمجرد النظر أو بخطوات بسيطة وهذا يستوجب أن تكون الدالة analytic ومعرفة على منحنى مغلق .

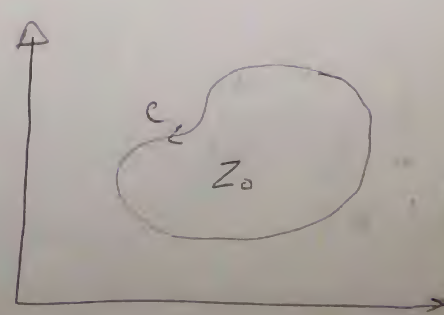
$\boxed{1}$ if $f(z)$ is analytic on simple closed curve (s.c.c) then

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

- معنى (simple closed curve) أنه منحنى مغلق لا يقطع نفسة والدالة داخل التكامل لا يوجد لها أصفار المقام أو مقياس أو مرافقه أي تحقق شروط الـ analytic .

(2) If $f(z)$ is analytic on s.c.c then

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$



- إذا كانت الدالة $f(z)$ لا يوجد لها أصفار للمقام داخل
المنحنى c ولا تحتوى على مقياس أو مرافقه فإن التكامل يمكن
حسابه بمجرد النظر ، نشيل صفر المقام من تحت ونعوض
به فوق ونضرب في $2\pi i$.

$\boxed{3}$ If $f(z)$ is analytic on s.c.c then

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\left.\frac{d^n f(z)}{dz^n}\right|_{z=z_0}$$

- لحساب التكامل نفاضل الدالة بمقدار (أس القوس - 1)
ونعوض بصفر المقام في ناتج التفاضل ونضرب الناتج في $\frac{2\pi i}{n!}$.

Example Evaluate

$\boxed{1}$ $\displaystyle\oint_{|z|=1} \sin z\,dz$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-5)}$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2\,dz}{(z-1)}$

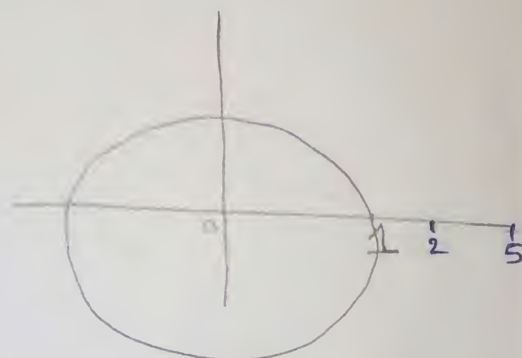
$\boxed{4}$ $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{e^z}{(z-2)^3}\,dz$

Solution

$\boxed{1}$ $\oint_{|z|=1} \sin z \, dz = 0$

$\rightarrow$ analytic ، لايوجد أصفار مقام

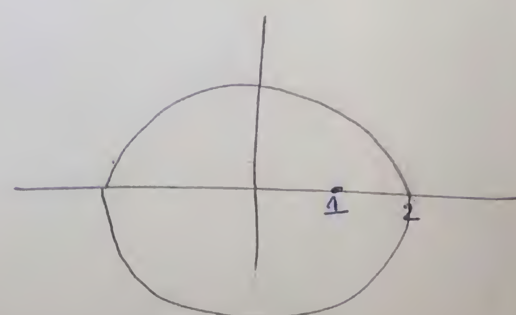
$\boxed{2}$ $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-5)}$



أصفار المقام $Z=5$ ، $Z=2$ لا تقع داخل المنحنى

$\therefore \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-2)(z-5)} = 0$

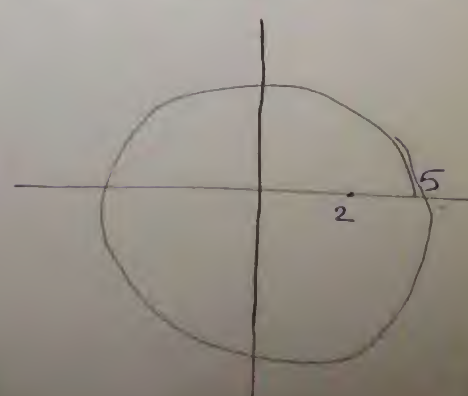
$\boxed{3}$ $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 \, dz}{(z-1)}$



$= 2\pi i \, (1)^2 = 2\pi i$

$\boxed{4}$

$Z=2 \leftarrow$ تقع داخل الدائرة



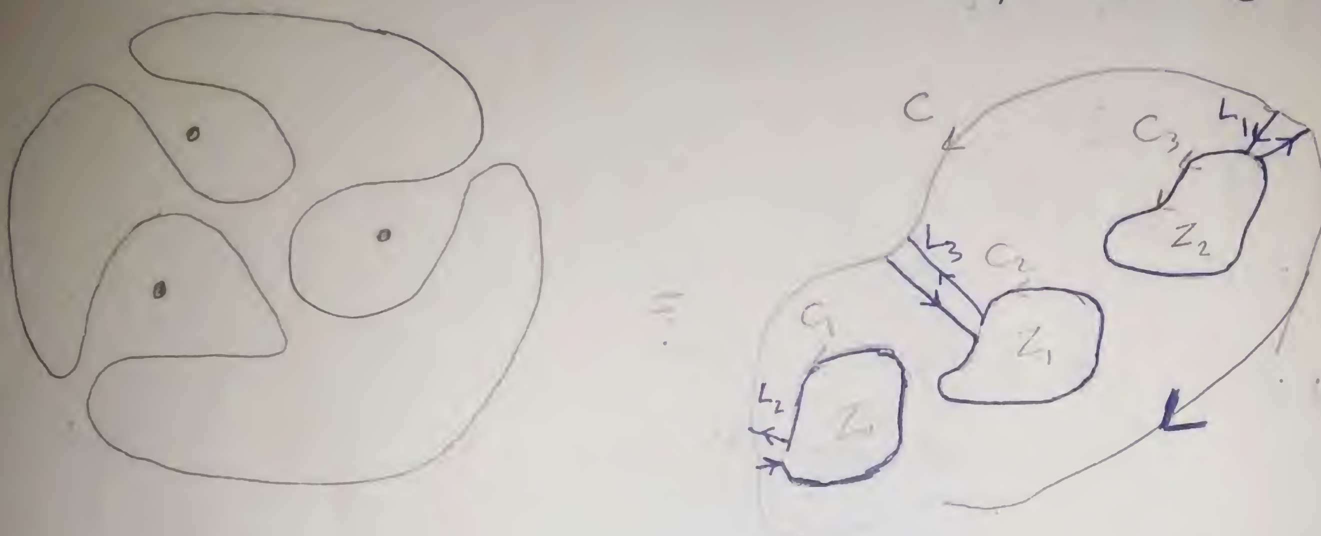
$I = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2 e^z}{dz^2} \right|_{z=2}$

$\boxed{I = \pi i \, e^z}$

$\boxed{7}$ Lec10

الأفكار

$\boxed{1}$ إذا وجد أكثر من قوس في المقام ويقع أصفارهم داخل التكامل نستخدم



$$\int_{L_1} + \int_{C_3} - \int_{L_1} - \int_{C} + \int_{L_2} + \int_{C_1} - \int_{L_2} +$$

$$\int_{L_3} + \int_{C_2} - \int_{L_3} = 0$$ ⟶ (analytic) الدالة

$$\therefore \oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$

- إذا وجد أكثر من صفر للمقام داخل المنحنى نحيط كل

صفر من أصفار المقام بمنحنى مغلق يحتوى صفر المقام

ولا يحتوى الباقى ونستخدم الصورة

$$\oint_{C} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$

- مع الحد الأول نجعل القوس اللى فيه $(Z-Z_0)$ لوحده

فى المقام ونجعل الباقى مقام البسط (كى نعرف تطبيق النظرية)

- مع الحد الثانى نجعل القوس الذى يحتوى $(Z-Z_1)$ فى المقام

ونجعل الباقى مقام البسط. وهكذا.

$\boxed{2}$ قوسين فى المقام واحد صفره يقع و الثانى صفره لا يقع

نجعل الذى صفره لا يقع مقام البسط.

Ex: Evaluate

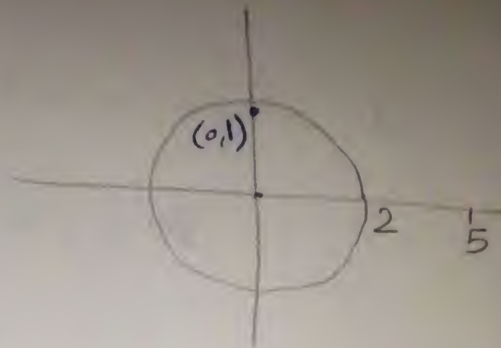
$\boxed{1}$ $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z-i)(z-5)}\,dz$ ، $\boxed{2}$ $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\cosh z}{(z-1)(z-2)(z-3)}\,dz$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{z^2}{(z-1)^2(z-6)}\,dz$

$\boxed{1}$

$z = i$ ← تقع داخل المنحنى.

$z = 5$ ← لاتقع داخل المنحنى.

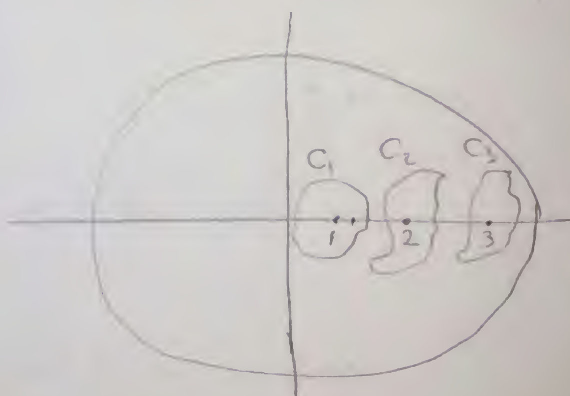


$$I = \oint \frac{\frac{\sinh z}{z-5}}{z-i}\, dz = 2\pi i \left(\frac{\sinh i}{i-5}\right)$$

$$= 2\pi i^2 \frac{\sinh i}{i-5} = \frac{-2\pi \sinh i}{i-5}$$

$\boxed{2}$ $z=1,\ z=2,\ z=3$ أصفار المقام

تقع داخل المنحنى



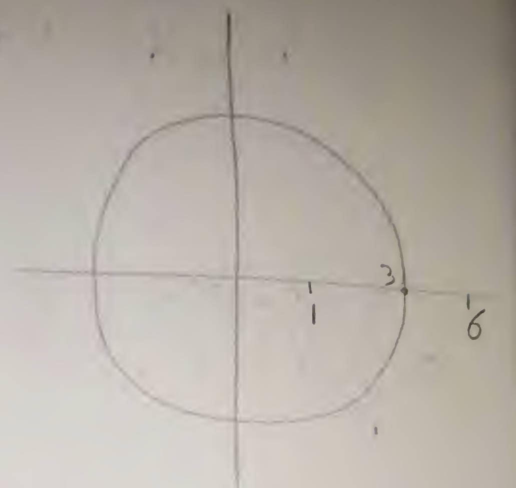
$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_2}$$

$$= \oint \frac{\frac{\cosh z}{(z-2)(z-3)}}{z-1} + \oint \frac{\frac{\cosh z}{(z-1)(z-3)}}{z-2} + \oint \frac{\frac{\cosh z}{(z-1)(z-2)}}{z-3}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cosh 1}{(-1)(-2)}\right) + 2\pi i\left(\frac{\cosh 2}{(1)(-1)}\right) + 2\pi i\left(\frac{\cosh 3}{(2)(1)}\right)$$

$\boxed{3}$

$Z=1$ ← تقع داخل الدائرة



$$I = \oint_C \frac{\frac{z^2}{(z-6)}}{(z-1)^2}\, dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!} \left. \frac{d \frac{z^2}{(z-6)}}{dz} \right|_{z=1}$$

$$= 2\pi i \left. \frac{(z-6)2z - z^2 * 1}{(z-6)^2} \right|_{z=1} = 2\pi i \left[\frac{(-5)(2)-1}{25} \right]$$

$\boxed{Ex}$ show that if $f(z)$ is analytic on simple closed curve the $\oint_C f(z)\, dz = 0$

$\boxed{\text{Notes}}$

→ Green theorem

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

<u>Sol</u>

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy)$$

$\boxed{11}$ Lec10

$$= \oint_C (u\,dx - v\,dy) + i \oint_C (v\,dx + u\,dy)$$

$$= \iint_D \left(\frac{-\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy$$

since $f(z)$ is analytic $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

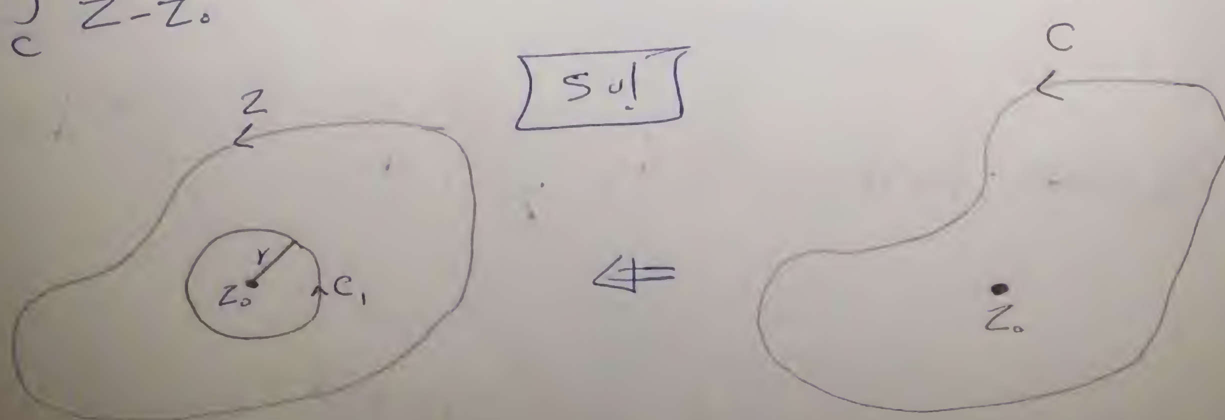
$$\therefore \oint_C f(z)\,dz = 0 \quad \#$$

$\boxed{Ex}$

show that if $f(z)$ is analytic on s.cc and z_0 inside c then

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

$\boxed{Sol}$



- نفرض دائرة مركزها Z_0 ونصف قطرها r .

$$|Z - Z_0| = r$$

$$\oint = \oint_{C_1}$$

$$I = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\, dz$$

$$\boxed{\begin{aligned} z - z_0 &= r e^{i\theta} \\ dz &= i r e^{i\theta}\, d\theta \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{i\theta})}{r e^{i\theta}}\, i r e^{i\theta}\, d\theta \qquad \text{as } r \to 0$$

$$= i f(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i\, f(z_0)$$